TAREA LÍMITES, INFINITÉSIMOS, L´Hôpital, WIRIS, PARA 2º DE BACHILLERATO: X290

Se trata de obtener los siguientes límites, teniendo en cuenta que en ocasiones utilizar la regla de L´Hôpital es engorroso, con lo que hay que recurrir a los infinitésimos equivalentes.
La teoría correspondiente se añade al final de la tarea, aunque puede usarse cualquier medio que lo trate con el rigor necesario.
L´Hôpital e infinitésimos no están reñidos, puede usarse uno y después el otro. Podemos utilizar infinitésimos en el numerador sólo (o en el denominador) y después L´Hôpital en el conjunto.
No olvidar que la comparación de infinitos es otra herramienta para calcular el límite.
Si dudamos de si un método u otro es el adecuado en algún caso, para eso disponemos de WIRIS, que al darnos el resultado del límite, nos permite comprobar que la estrategia utilizada ha sido correcta o por lo menos medianamente conveniente, desarrollando en ustedes la investigación matemática (un poquito de BLV) que es otra de las habilidades que se pretende conseguir con esta tarea.
Aparte del cálculo manual de los límites es IMPRESCINDIBLE contrastar con wiris el resultado, cuya captura de pantalla impresa en papel (puede ser en borrador y no necesariamente en color –tenemos que ahorrar-) hay que adjuntar a la realización manual del ejercicio; estaría mejor además la representación de la función y ver que tiende al límite en el punto donde lo calculamos. Esto último debe hacerse en algunos casos si se desea obtener la máxima nota.
La tarea se entrega en papel, añadiendo a cada obtención manual del límite la captura impresa del resultado de wiris y la representación de la función que nos da wiris o cualquier otra aplicación de representación de funciones en su caso, el día 13 de Mayo de 2013.
Si algún límite no sale, no coincide con wiris o con su representación, el alumno puede y debe comentar su opinión al respecto de las desviaciones que se obtienen.
La máxima nota se obtendrá con la realización en las condiciones anteriores de todos los límites siguientes y contará como un control de evaluación.

Los límites que hay que trabajar según lo indicado:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} =$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} =$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x} =$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x} =$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)}{\left(x-x^3\right)^2} =$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{x} =$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\operatorname{sen} x}{\arctan^2 3x} =$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cotan} x \cdot \ln(1+\operatorname{sen} x) =$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^3}{\operatorname{sen} x^2} =$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\operatorname{sen} x} =$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1-\cos x} =$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x} =$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x \cdot (1-\cos x)}{\ln^3 (x+1)} =$

INFINITÉSIMOS:

Básicamente es el reflejo de las tendencias de funciones infinitésimas en un punto expresado en una regla que nos ayuda a calcular límites, ya que con las tablas de equivalencia de infinitésimos podemos sustituir unas expresiones por otras equivalentes, cuando aparecen multiplicando o dividiendo estas expresiones; pero antes debemos aclarar algunas cosas:

Infinitésimos son funciones cuyo límite en x=a es igual a cero; O lo que es lo mismo: f(x) es un infinitésimo en x=a si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

Son infinitésimos en un entorno de x=0, las funciones:

$$f(x) = x$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \operatorname{tag} x$$

$$f(x) = e^x - 1$$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x$$

Ya que para todas ellas:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Están muy claros estos límites, basta con sustituir a lo básico:

$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^3 = 0^3$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \tan x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} e^x - 1 = \lim_{x\to 0} e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\log(1+x)\right] = \log(1+0) = \log 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x = \lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^2 = (\operatorname{sen} 0)^2 = 0^2 = 0$$

Dos funciones son equivalentes en un entorno de x=a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Según esto, dos infinitésimos son equivalentes en un entorno de x=a si:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Por ello, decimos que por ejemplo: f(x)= sen x y g(x) = x, son infinitésimos equivalentes en x=0,

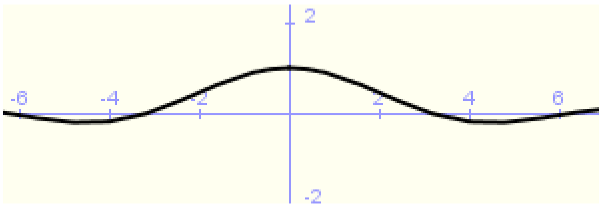
Ya que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1:$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 0}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ldots\left[\text{L'Hôpital}\right]\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 0}{1}=\frac{1}{1}=1$$

No tenemos por qué calcularlo por L´Hôpital, ya que si representamos la función (dando valores o utilizando WIRIS, vemos que ésa es la tendencia de la función en un entorno de x=0)



Se ve perfectamente que la combinación de funciones tiende a uno.
Con todo ello, se elaboran tablas de equivalencia de infinitésimos en entornos determinados, de las cuales una de las más utilizadas:

En un entorno de x=0

TABLA I DE INFINITÉSIMOS		
1	INFINITÉSIMO	EQUIVALENTE
2	sen (kx)	kx
3	tan (kx)	kx
4	arcsen (kx)	kx
5	arctan (kx)	kx
6	1 - cos (kx)	$\frac{kx^2}{2}$
7	Cos x	$1-\frac{x^2}{2}$
8	ln x	x-1
9	ln (1+x)	x
10	e^x	1+x
11	$e^{kx}-1$	kx
12	$a^{kx}-1$	kx·ln a
13	$\frac{1}{1+x}$	1-x
14	$(1+x)^n-1\ (n>1)$	nx
15	$\frac{(1+x)^n-1}{x}\ (n>1)$	n
16	$\sqrt[n]{1+x}-1$	$\frac{x}{n}$
17	$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$	$\frac{1}{n}$

Del mismo modo, si f(x) es un infinitésimo en un entorno de x=0:

TABLA II DE INFINITÉSIMOS		
1	INFINITÉSIMO	EQUIVALENTE
2	sen [f(x)]	f(x)
3	tan [f(x)]	f(x)
4	arcsen [f(x)]	f(x)
5	arctan [f(x)]	f(x)
6	1 – cos [f(x)]	$\frac{\left[f(x)\right]^2}{2}$
7	Cos [f(x)]	$1-\frac{\left[f(x)\right]^2}{2}$
8	ln [f(x)]	f(x) - 1
9	ln [1+f(x)]	f(x)
10	$e^{f(x)}-1$	f(x)
11	$a^{f(x)}-1$	f(x) · ln a
12	$\left[1+f(x)\right]^n-1\ (n>1)$	n·f(x)
13	$\sqrt[n]{1+f(x)}-1$	$\frac{f(x)}{n}$

En un entorno de x=1

INFINITÉSIMO	EQUIVALENTE
ln x	x-1
sen (x-1)	x-1

Se puede sustituir un infinitésimo por su equivalente cuando se encuentran multiplicando o dividiendo. Cuando están sumando o restando no, la expresión en general no resulta equivalente.